

2020年成人高考专升本高数(二)试题

2020年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学(二)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第I卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} =$ 【 】
 A. $e^{\frac{2}{3}}$ B. $e^{\frac{2}{5}}$ C. $e^{\frac{1}{2}}$ D. e^6
- 设函数 $y = x + 2\sin x$, 则 $dy =$ 【 】
 A. $(1 - 2\cos x)dx$ B. $(1 + 2\cos x)dx$ C. $(1 - \cos x)dx$ D. $(1 + \cos x)dx$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} =$ 【 】
 A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$
- 设函数 $f(x) = 3 + x^5$, 则 $f'(x) =$ 【 】
 A. x^4 B. $1 + x^4$ C. $\frac{1}{5}x^4$ D. $5x^4$
- 设函数 $f(x) = 2\ln x$, 则 $f''(x) =$ 【 】
 A. $\frac{2}{x^2}$ B. $-\frac{2}{x^2}$ C. $\frac{1}{x^2}$ D. $-\frac{1}{x^2}$
- $\int_{-2}^2 (1 + x)dx =$ 【 】
 A. 4 B. 0 C. 2 D. -4
- $\int \frac{3}{x^5} dx =$ 【 】
 A. $\frac{3}{4x^4} + C$ B. $\frac{3}{5x^4} + C$ C. $-\frac{3}{4x^4} + C$ D. $-\frac{3}{5x^4} + C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排, 则 2 本英语书恰好相邻的概率为 【 】

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$, 则 $dz =$ 【 】

- A. $x dx - 4y dy$ B. $x dx - y dy$ C. $2x dx - 4y dy$ D. $2x dx - 8y dy$

10. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】

- A. $3x^2 + 2xy$ B. $3x^2 + y^2$ C. $2xy$ D. $2y$

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$ _____.

12. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为 _____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$ _____.

15. $\int (3x + 2\sin x) dx =$ _____.

16. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为 _____.

17. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt) ' =$ _____.

18. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$ _____.

19. 区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为 _____.

20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 $(1, 1)$ 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$ _____.

得分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分8分)

计算 $\int x \sin x dx$.

22. (本题满分8分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$.

23. (本题满分8分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 4$, x 轴围成的有界区域, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

26. (本题满分 10 分)

求函数 $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

28. (本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 $E(X) = 0$.

(1) 求 a, b ;

(2) 求 $E[X(X+1)]$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} (1+2x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-2x)^{\frac{1}{1-x}} = \left[\lim_{x \rightarrow 1} (1+2x)^{\frac{1}{x-1}} \right]^{\frac{1}{-1}} = e^{\frac{1}{-1}}$.

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (x+2\sin x)' = 1+2\cos x$, 故 $dy = y'dx = (1+2\cos x)dx$.

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了分式函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{1^2-1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}$.

4. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (3+x^2)' = 5x'$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶导函数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}$, $f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$.

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了牛顿-莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 $\int_2^4 (1+x)dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_2^4 = 4$.

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{3}{x^2} dx = 3 \times \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{3}{4x^2} + C$.

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了随机事件的概率的知识点.

【应试指导】 2本英语书恰好相邻的概率为 $\frac{A_1^1 \cdot A_2^2}{A_3^3} = \frac{2}{3}$.

9. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -8y$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy$.

10. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy$.

二、填空题

11. 【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 故 $dy = y'dx = 2e^{2x} dx$.

12. 【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 易知 $f'(x) = 3x^2 - 6$, 令 $f'(x) < 0$, 则有 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

13. 【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了分段函数连续性的知识点.

【应试指导】 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 而 $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (a + \sin x) = a$, 因此 $a = -2$.

14.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

15.【答案】 $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (3x + 2\sin x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$.

16.【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数切线的知识点.

【应试指导】 $y' = [\arctan(3x+1)]' = \frac{3}{1+(3x+1)^2}$, 故曲线在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为 $y' \Big|_{x=0} = \frac{3}{1+(3 \times 0+1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{3}{2}$.

17.【答案】 $2\sin(4x^2)$

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $(\int_0^{2x} \sin^2 t dt)' = \sin^2(2x) \cdot (2x)' = 2\sin(4x^2)$.

18.【答案】 e

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$.

19.【答案】 $\frac{4}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的应用的知识点.

【应试指导】 区域 D 的面积为 $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = (\frac{1}{3}x^3 - x) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$.

20.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对 x 求导, 得 $3y' \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^2+1}$, 故有 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2xy}{3y^2+1} \Big|_{x=1} = \frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^2+1} = \frac{1}{2}$.

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \int x \sin x dx &= -\int x d(\cos x) \\ &= -(x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. f'(x) &= e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x (\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(\cos x - \sin x) + e^x(\cos x - \sin x)' \\ &= e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} 24. \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1). \end{aligned}$$

25. 区域 $D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4$,

$$\begin{aligned} \text{故所求旋转体的体积} &= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy \\ &= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy \\ &= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2 \\ &= \frac{128}{5} \pi. \end{aligned}$$

$$26. \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy,$$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

得驻点为 $(1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$.

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在 } (1, 0) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8,$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0,$$

故函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小}} = -1$;

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1, 1)$ 不是极值点;

$$\text{在 } (-1, -1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1, -1)$ 不是极值点.

因此函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小}} = -1$.

$$27. y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 1.$$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间;

函数的拐点为 $(1, 1)$.

28. (1) 由概率的性质可知 $a + 0.5 + b = 1$,

$$\text{又 } E(X) = 0, \text{ 得 } -1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0,$$

$$\text{故有 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}.$$

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\text{而 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-0)^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1.$$