

2015年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+1} = (\quad)$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin 3x$ 是 $2x$ 的 ()

- A. 低级无穷小量 B. 等价无穷小量
C. 同阶但不等价无穷小量 D. 高阶无穷小量

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ()

- A. 有定义且有极限 B. 有定义但无极限
C. 无定义但有极限 D. 无定义且无极限

4. 设函数 $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ ，则 $f'(x) = (\quad)$

- A. $(1+x)e^{\frac{x}{2}}$ B. $(\frac{1}{2}+x)e^{\frac{x}{2}}$ C. $(1+\frac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}$ D. $(1+2x)e^{\frac{x}{2}}$

5. 下列区间为函数 $f(x) = x^4 - 4x$ 的单调增区间的是 ()

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, +\infty)$

6. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上连续，则 $\int_{-1}^1 f(3x)dx = (\quad)$

- A. 0 B. $\frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t)dt$ C. $\frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(t)dt$ D. $3 \int_{-3}^3 f(t)dt$

7. $\int (x^{-2} + \sin x)dx = (\quad)$

- A. $-2x^{-1} + \cos x + C$ B. $-2x^{-3} + \cos x + C$
C. $-\frac{x^{-3}}{3} - \cos x + C$ D. $-x^{-1} - \cos x + C$

8. 设函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)dt$ ，则 $f''(x) = (\quad)$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

9. 设二元函数 $z = x^y$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

- A. yx^{y-1} B. yx^{y+1} C. $x^y \ln x$ D. x^y

10. 设二次函数 $z = \cos(xy)$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\quad)$

- A. $y^2 \sin(xy)$ B. $y^2 \cos(xy)$ C. $-y^2 \sin(xy)$ D. $-y^2 \cos(xy)$

二、填空题：11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分。

11. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$ _____ .

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}} =$ _____ .

13. 设函数 $y = \ln(4x - x^2)$ ，则 $y'(1) =$ _____ .

14. 设函数 $y = x + \sin x$ ，则 $dy =$ _____ .

15. 设函数 $y = x^{\frac{3}{2}} + e^{-x}$ ，则 $y'' =$ _____ .

16. 设 $\int f(x)dx = \cos(\ln x) + C$ ，则 $f(x) =$ _____ .

17. $\int_{-1}^1 x|x| dx =$ _____ .

18. $\int d(x \ln x) =$ _____ .

19. 由曲线 $y = x^2$ ，直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的平面有界图形的面积 $S =$ _____ .

20. 设二元函数 $z = e^{\frac{y}{x}}$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} =$ _____ .

三、解答题：21~28 题，共 70 分。

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}$.

22. (本题满分 8 分)

设函数 $y = \cos(x^2 + 1)$ ，求 y' .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{x}{4-x^2} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^4 f(x)dx$ ，其中 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

25. (本题满分 8 分)

已知 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^x f(t)e^{-t} dt = x$ ，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

26. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 判断曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性.

27. (本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2 + 3x$ 的极值.

25. 等式两边对 x 求导, 得

$$f(x)e^{-x} = 1, \quad (4 \text{ 分})$$

$$f(x) = e^x.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 e^x dx \\ &= e^x \Big|_0^1 \\ &= e - 1. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

26. (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$.

$f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 1)$, 单调减区间是 $(1, +\infty)$.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 $f(1) = -1$. (7 分)

(2) 因为 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 是凸的.

27. $f'_x = x - y + 3$, $f'_y = -x + 2y$.

$$\text{由} \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \text{解得} x = -6, y = -3. \quad (5 \text{ 分})$$

$$f''_{xx}(x, y) = 1, f''_{xy}(x, y) = -1, f''_{xx}(x, y)(-6, -3) = 2.$$

$$A = f''_{xx}(-6, -3) = 1, B = f''_{xy}(-6, -3) = -1, C = f''_{yy}(-6, -3) = 2.$$

$$B^2 - AC = -1 < 0, A > 0,$$

故 $f(x, y)$ 在点 $(-6, -3)$ 处取极小值, 极小值为 $f(-6, -3) = -9$ (10 分)

28. (1) X 可能的取值为 0, 1, 2. (2 分)

$$P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = 0.1,$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = 0.6,$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = 0.3,$$

因此 X 的概率分布为 (7 分)

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

(2) $E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2$ (10 分)